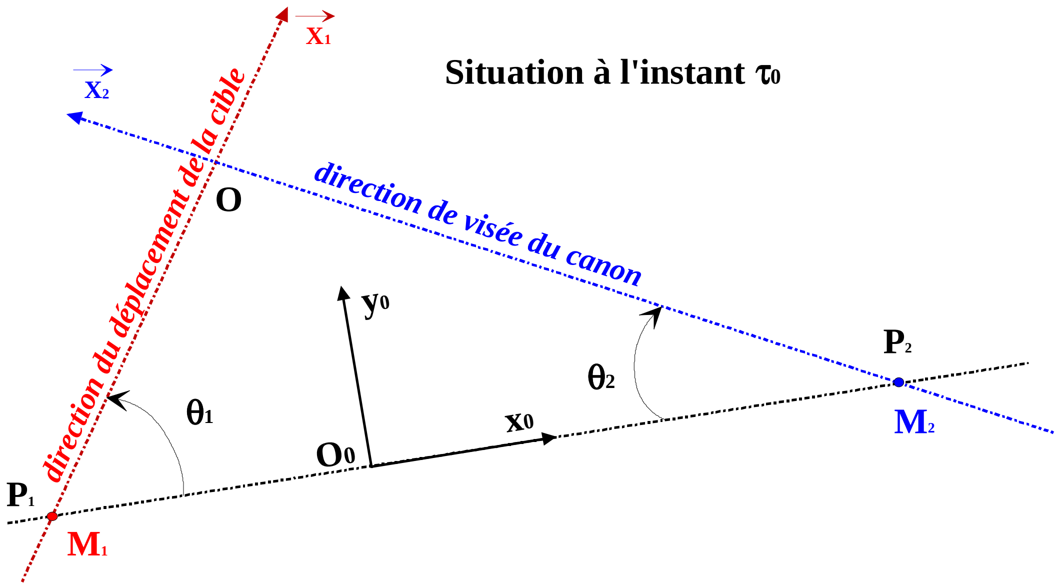
Cinématique du point **TD2**

1. CORRIGE DU TD2

1.1. Réponse à la question 3-1

1.1.1. Traduction géométrique du problème.



1.1.2. Traduction vectorielle du problème.

Les points M_1 et M_2 se rencontreront au point O fixe dans l'espace affine $\Re_0(O_0,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$.
La trajectoire du point M_1 est portée par la droite (P_1,O) et la trajectoire du point M_2 est portée par la droite (P_2,O).

$\overrightarrow{V_{(M1/R_0)}}$ est portée par la droite (P_1,O)

$\overrightarrow{V_{(M2/R_0)}}$ est portée par la droite (P_2,O)

- ***Etude du mouvement du point M_1***

P_1 est fixe $\Re_0(O_0,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$, $\overrightarrow{V_{(M1/R_0)}}=\left(\dfrac{d\overrightarrow{O_0M_1}}{dt}\right)_{R_0}=\left(\dfrac{d\overrightarrow{P_1M_1}}{dt}\right)_{R_0}$

Posons que $\overrightarrow{P_1M_1}=x_1(t).\vec{x}_1$ et $\overrightarrow{V_{(M1/R_0)}}=\left\|\overrightarrow{V_{(M1/R_0)}}\right\|\vec{x}_1$,

$$\overrightarrow{V_{(M1/R_0)}}=\left(\frac{d\overrightarrow{P_1M_1}}{dt}\right)_{R_0}=\left\|\overrightarrow{V_{(M1/R_0)}}\right\|\vec{x}_1=\left(\frac{dx_1(t).\vec{x}_1}{dt}\right)_{R_0}$$, en intégrant cette équation,

avec les conditions initiales : A l'instant τ_0 , les points M1 et M2 sont en deux point distants P1 et P2 fixe dans l'espace affine . $\Re_0(O_0,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$.

$\boxed{\left\|\overrightarrow{V_{(M1/R_0)}}\right\|(\tau_1-\tau_0).\vec{x}_1=x_1(t).\vec{x}_1}$ où $\vec{x}_1$ est fixe dans $R_0(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$, on obtient donc $\boxed{\left\|\overrightarrow{V_{(M1/R_0)}}\right\|(\tau_1-\tau_0)=x_1(t)}$

- ***Etude du mouvement du point M_2***

P_2 est fixe $\Re_0(O_0,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$, $\overrightarrow{V_{(M2/R_0)}}=\left(\dfrac{d\overrightarrow{O_0M_2}}{dt}\right)_{R_0}=\left(\dfrac{d\overrightarrow{P_2M_2}}{dt}\right)_{R_0}$

Posons que $\overrightarrow{P_2M_2}=x_2(t).\vec{x}_2$ et $\overrightarrow{V_{(M1/R_0)}}=\left\|\overrightarrow{V_{(M1/R_0)}}\right\|\vec{x}_1$,

$\overrightarrow{V_{(M1/R_0)}}=\left(\dfrac{d\overrightarrow{P_1M_1}}{dt}\right)_{R_0}=\left\|\overrightarrow{V_{(M2/R_0)}}\right\|\vec{x}_2=\left(\dfrac{dx_2(t).\vec{x}_2}{dt}\right)_{R_0}$, en intégrant cette équation,

avec les conditions initiales : A l'instant τ_0 , les points M1 et M2 sont en deux point distants P1 et P2 fixe dans l'espace affine . $\Re_0(O_0,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$.

$\boxed{\left\|\overrightarrow{V_{(M2/R_0)}}\right\|(\tau_2-\tau_0).\vec{x}_2=x_2(t).\vec{x}_2}$ où $\vec{x}_2$ est fixe dans $R_0(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$, on obtient donc $\boxed{\left\|\overrightarrow{V_{(M2/R_0)}}\right\|(\tau_2-\tau_0)=x_2(t)}$

- ***condition de rencontre des points M1 et M2***

Pour que les points M1 et M2 se rencontre en 0, il faut que : $(\tau_1-\tau_0)=(\tau_2-\tau_0)$, c'est à dire que $\tau_1=\tau_2=\tau_r$ où τ_r est l'instant de rencontre des points M1 et M2 au point O.

$\left\|\overrightarrow{V_{(M2/R_0)}}\right\|(\tau_2-\tau_0).\vec{x}_2=x_2(t).\vec{x}_2\Leftrightarrow\overrightarrow{V_{(M2/R_0)}}.(\tau_2-\tau_0)=\overrightarrow{P_2M_2}$ et $\left\|\overrightarrow{V_{(M1/R_0)}}\right\|(\tau_1-\tau_0).\vec{x}_1=x_1(t).\vec{x}_1\Leftrightarrow\overrightarrow{V_{(M1/R_0)}}.(\tau_1-\tau_0)=\overrightarrow{P_1M_1}$

$$\begin{cases}\overrightarrow{V_{(M2/R_0)}}.(\tau_2-\tau_0)=\overrightarrow{P_2M_2}\\ \overrightarrow{V_{(M1/R_0)}}.(\tau_1-\tau_0)=\overrightarrow{P_1M_1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{V_{(M2/R_0)}}.(\tau_r-\tau_0)=\overrightarrow{P_2O}\\ \overrightarrow{V_{(M1/R_0)}}.(\tau_r-\tau_0)=\overrightarrow{P_1O}\end{cases}\Rightarrow\left(\overrightarrow{V_{(M2/R_0)}}-\overrightarrow{V_{(M1/R_0)}}\right)(\tau_r-\tau_0)=\overrightarrow{P_1P_2}$$

Par composition des vitesses, $\left(\overrightarrow{V_{(M2/R_0)}}-\overrightarrow{V_{(M1/R_0)}}\right)$ est la vitesse relative de M1 et M2 par rapport à M1 que l'on note $\overrightarrow{V_{(M2/M1)}}$.

Conclusion : Pour que les robots se rencontrent au point O, il est nécessaire que la vitesse relative $\overrightarrow{V_{(M2/M1)}}$ des extrémités des effecteurs modélisés par les points M1 et M2 soit colinéaire au vecteur $\overrightarrow{P_1P_2}$. Traduit vectoriellement, $\boxed{\overrightarrow{V_{(M2/M1)}}\wedge\overrightarrow{P_1P_2}=\vec{0}}$

1.1.3. Réponse à la question 3-1

Posons $\overrightarrow{P_1P_2}=a.\vec{x}_0$. On a de plus la relation $\overrightarrow{V_{(M2/M1)}}\wedge\overrightarrow{P_1P_2}=\vec{0}$

$$\overrightarrow{V_{(M2/M1)}}\wedge\overrightarrow{P_1P_2}=\vec{0}\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{V_{(M2/R_0)}}-\overrightarrow{V_{(M1/R_0)}}\right)\wedge\overrightarrow{P_1P_2}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{V_{(M2/R_0)}}\wedge\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{V_{(M1/R_0)}}\wedge\overrightarrow{P_1P_2}$$

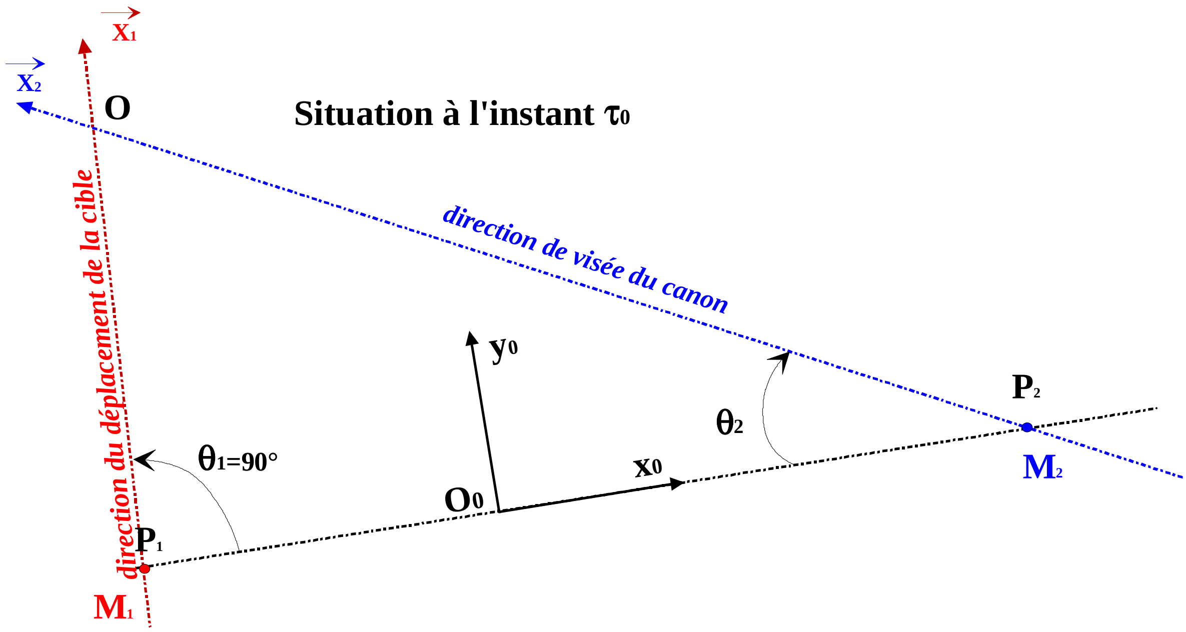
$$\overrightarrow{V_{(M2/R_0)}}\wedge\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{V_{(M1/R_0)}}\wedge\overrightarrow{P_1P_2}=\left|\begin{matrix}\left\|\overrightarrow{V_{(M2/R_0)}}\right\|\cos\theta_2\\ \left\|\overrightarrow{V_{(M2/R_0)}}\right\|\sin\theta_2\\ 0\end{matrix}\right._{R0}\wedge\left|\begin{matrix}a\\0\\0\end{matrix}\right._{R0}=\left|\begin{matrix}\left\|\overrightarrow{V_{(M1/R_0)}}\right\|\cos\theta_1\\ \left\|\overrightarrow{V_{(M1/R_0)}}\right\|\sin\theta_1\\ 0\end{matrix}\right._{R0}\wedge\left|\begin{matrix}a\\0\\0\end{matrix}\right._{R0}\Rightarrow 0=\left\|\overrightarrow{V_{(M2/R_0)}}\right\|.a.\sin\theta_2=\left\|\overrightarrow{V_{(M1/R_0)}}\right\|.a.\sin\theta_1$$

$\boxed{\sin\theta_2=\sin\theta_1.\dfrac{\left\|\overrightarrow{V_{(M1/R_0)}}\right\|}{\left\|\overrightarrow{V_{(M2/R_0)}}\right\|}}$ d'où l'application numérique : $\sin\theta_2=\sin30.\dfrac{20}{300}$, on obtient $\theta_2=1,9$ degrés

1.2. Réponse à la question 3-2

1.2.1. Traduction géométrique du problème.

La correction ayant été mal faite, le canon tire une deuxième fois et la charge percute la cible lorsque celle ci passe au plus près du canon. D'où $\overrightarrow{V_{(M1/R_0)}}.\overrightarrow{P_1P_2}=\vec{0} \Leftrightarrow \theta_1=90°$



$$\sin\theta_2=\frac{\left\|\overrightarrow{V_{(M1/R_0)}}\right\|}{\left\|\overrightarrow{V_{(M2/R_0)}}\right\|}=\frac{20}{300}\Leftrightarrow\theta_2=3{,}82° \text{ et } \overrightarrow{P_1P_2}=a.\vec{x}_0 \text{ avec } a=300m$$

on a de plus la relation : $\left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{P_1O}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{P_2O}\right\|^2$

$$\left\|\overrightarrow{P_1O}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{P_2O}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\|^2=\left(\frac{300}{\cos\theta_2}\right)^2-(300)^2=401{,}25$$

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{P_1O}\right\|^2=20{,}03\text{ m}}$$

Le canon tire donc à 20;03 mètres devant la cible